



Decaimento assintótico para o mapa *logistic-like*

Luam Silva de Paiva*, Joelson Dayvison Veloso Hermes

IFSULDEMINAS - *campus* Inconfidentes

*paivaluan41@gmail.com



Introdução

O mapa logístico é um modelo matemático que foi descrito em 1976 pelo biólogo Robert May, com uma aplicação direta em Biologia [3]. Tal mapa é descrito pela equação

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n). \quad (1)$$

Esta equação possui muitas virtudes, como o fato de ser acessível e mesmo assim ilustrar muitas noções de dinâmica não linear [1], apresentando uma matemática cheia de vida e riqueza onde muitos aspectos ainda não são rigorosamente entendidos, e são estudados por alguns dos melhores matemáticos da atualidade.

Neste trabalho, estudaremos a dinâmica do mapa logistic-like, que é descrito pela equação:

$$x_{n+1} = Rx_n(1 - x_n^\gamma), \text{ com } \gamma > 0, \quad (2)$$

onde x_n é o número de indivíduos na n -ésima geração e R um parâmetro de controle. Tal mapa representa uma generalização do mapa logístico [4].

Objetivos

O foco do trabalho é estudar a dinâmica do mapa logistic-like, o qual é uma generalização do mapa logístico, considerando a convergência para o ponto de equilíbrio no ponto de bifurcação e para tal fazer uma descrição fenomenológica com um conjunto de hipóteses de escala levando a uma função homogênea e consequentemente a uma lei de escala.

Resultados e Discussões

Vamos considerar a convergência para o ponto de equilíbrio no ponto de bifurcação. Neste caso a evolução dinâmica para o ponto fixo deve ser obtida por uma função homogênea generalizada em função das variáveis n e x_0 . Tal função pode ser descrita como:

$$x(x_0, n) = \ell x(\ell^a x_0, \ell^b n), \quad (3)$$

o qual ℓ é um fator de escala, a e b expoentes característicos [2].

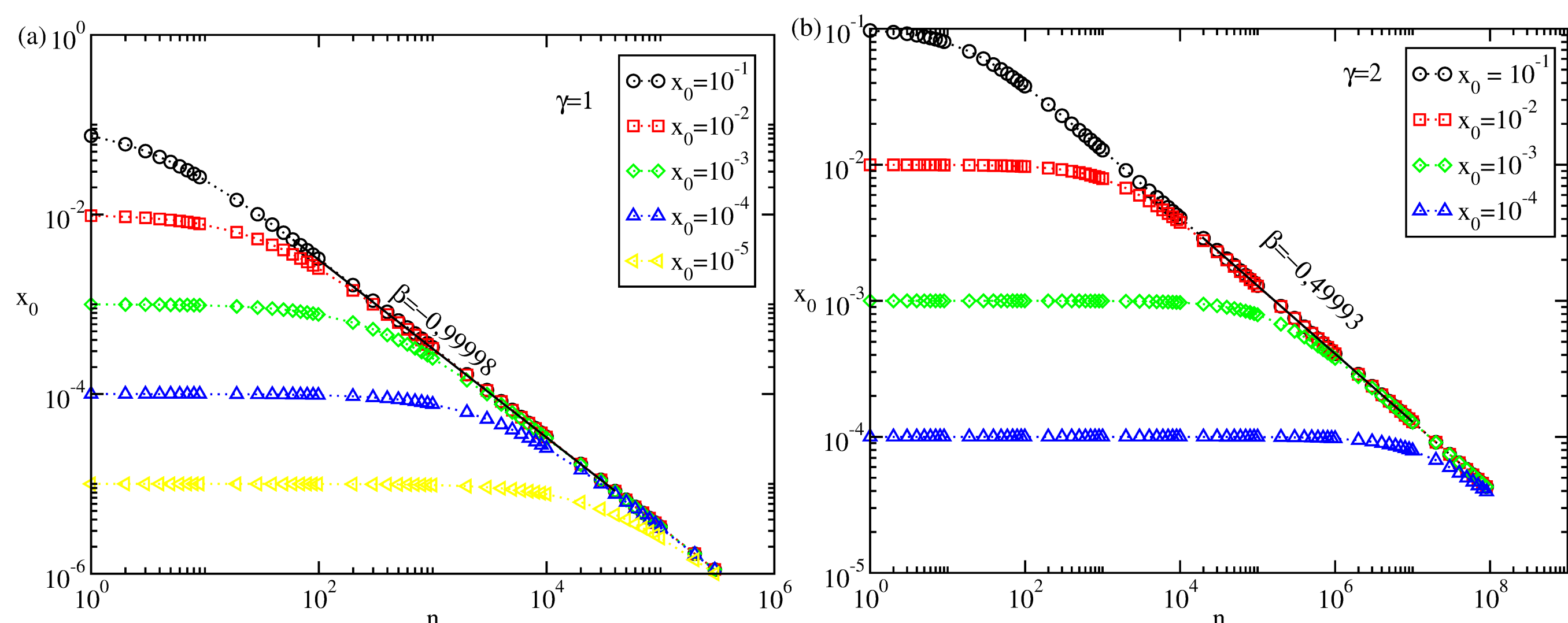


Diagrama de decaimento para (a) $\gamma = 1$ e (b) $\gamma = 2$.

Fazendo uma análise em $R = R_c = 1$. Sugerimos as seguintes hipóteses:

$$1 - x(n) \sim x_0^\alpha, \text{ para } n \ll n_x;$$

$$2 - x(n) \sim n^\beta, \text{ para } n \gg n_x;$$

$$3 - n_x \sim x_0^z.$$

Relacionando os expoentes característicos da equação (3) com os expoentes críticos da hipóteses. Tomando $\ell^a x_0 = 1$, temos que $\ell = x_0^{-\frac{1}{a}}$, portanto $x(x_0, n) = x_0^{-\frac{1}{a}} x(1, x_0^{\frac{-b}{a}} n)$. Considerando $x(1, x_0^{\frac{-b}{a}} n)$ seja uma constante para $n \ll n_x$, relacionando com a hipótese 1, temos que $x_0^{-\frac{1}{a}}$, portanto

$$\alpha = \frac{-1}{a}. \quad (4)$$

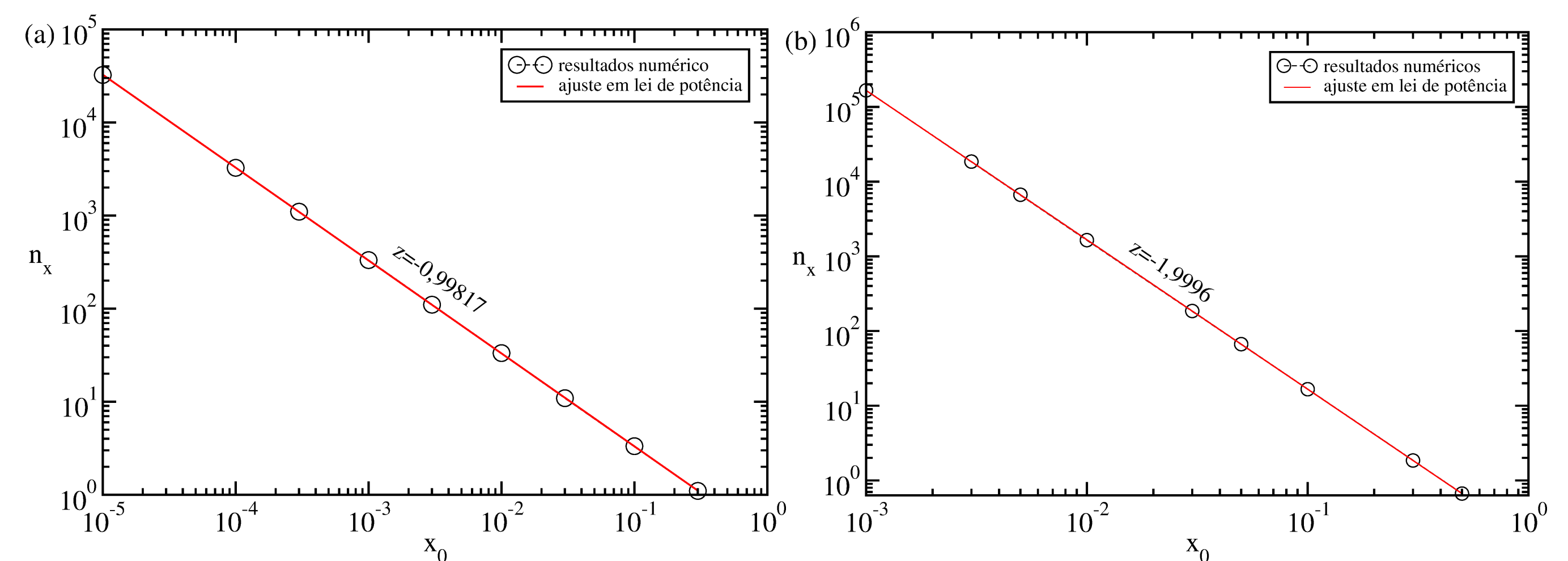
Considerando agora $\ell^b n = 1$, temos que $\ell = n^{-\frac{1}{b}}$, logo $x(x_0, n) = n^{-\frac{1}{b}} x(n^{-\frac{a}{b}} x_0, 1)$. Considerando que $x(n^{-\frac{a}{b}} x_0, 1)$ seja uma constante para $n \gg n_x$, e relacionando com a hipótese 2 temos que $n^{-\frac{1}{b}} = n^\beta$, então

$$\beta = \frac{-1}{b}. \quad (5)$$

Coparando as duas funções de ℓ obtemos que $n^\beta = x_0^\alpha$, portanto $n_x = x_0^{\frac{\alpha}{\beta}}$. E temos da hipótese 3 que $n_x = x_0^z$, assim

$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (6)$$

Tem-se então que a relação acima define uma lei de escala, em que se tivermos dois expoentes conhecidos encontramos o terceiro.



Esboço de n_x vs. x_0 . Um ajuste em lei de potência fornece z , com (a) $\gamma = 1$ e (b) $\gamma = 2$.

Ainda para o caso $R = R_c$ iremos mostrar uma abordagem analítica para o equilíbrio, o qual analisamos a equação do mapeamento escrito como $x_{n+1} = x_n - x_n^{\gamma+1}$, desta maneira reescrevemos a equação assim

$$x_{n+1} - x_n = -x_n^{\gamma+1}, \text{ disso temos } \frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} = -x_n^{\gamma+1}.$$

Assim fizemos a seguinte aproximação:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{(n+1) - n} \cong \frac{dx}{dn} = -x_n^{\gamma+1}, \quad (7)$$

consideramos que a variável x é praticamente contínua, com isso chegamos em uma EDO de primeira ordem. Fazendo a separação de variáveis temos:

$$\int_{x_0}^{x(n)} \frac{1}{x^{\gamma+1}} dx = \int_0^n dn, \quad (8)$$

que nos leva a:

$$x(n) = \frac{x_0}{[x_0^\gamma \gamma n + 1]^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad (9)$$

Analisando a equação (9) temos que $(x_0^\gamma \gamma n) \ll 1$ e para $n \ll n_x$, então $x(n) \sim x_0^1$. Verificamos com a primeira hipótese de escala, notamos que $\alpha = 1$. Agora para o caso em que $(x_0^\gamma \gamma n) \gg 1$ e para $n \gg n_x$, então $x(n) \sim n^{-\frac{1}{\gamma}}$, comparando com a segunda hipótese, chegamos que $\beta = \frac{-1}{\gamma}$. Para o ultimo caso em que $(x_0^\gamma \gamma n) = 1$, então $n_x \sim x_0^{-\gamma}$. Comparamos com a terceira hipótese e chegamos que $z = -\gamma$.

Conclusões

As simulações numéricas confirmam os resultados encontrados analiticamente uma vez que para $\gamma = 1$ chegamos que, $\alpha = 1, \beta = -0,99998$ e $z = -1,00002$, e para $\gamma = 2$ chegamos que, $\alpha = 1, \beta = -0,49993$ e $z = -1,9996$. Além disso, percebe-se que os expoentes β e z dependem do parâmetro γ , uma vez que $\beta = \frac{-1}{\gamma}$ e $z = -\gamma$.

Referências

- [1] FEIGENBAUM, M. J. *The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations*. J. Stat. Phys. 21, 669-706, 1979.
- [2] HERMES, J. D. V.; et al In: Simpósio de Pós-Graduação do IFSULDEMINAS, 4, 2015, Poços de Caldas, *Estudo do Mapa LOGÍSTICO-LIKE: Convergência para o estado estacionário*. Resumos...Poços de Caldas: IFSULDEMINAS, 2015, p.6.
- [3] MAY, Robert M.. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, 261:459-467, 1976.
- [4] RANDO, D. S. *Convergência para Estados Assintóticos em Mapeamentos Unidimensionais*. 35 f. Dissertação (Mestrado) - Mestrado Acadêmico em Física Aplicada - UNESP - Campus Rio Claro, Rio Claro-SP, 2016.

Agradecimentos

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – *Campus* Inconfidentes. Ao grupo de pesquisa em sistemas complexos e dinâmica não linear da UNESP - Rio Claro.