Propriedades de Transporte Caótico em mapeamentos Hamiltonianos Não Lineares

Laura Helena Pozzo*, Edson Denis Leonel

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - *campus* Rio Claro

*laura_pozzo@hotmail.com

1st Perspectives on Oscillation Control

Introdução

O transporte é o processo pelo qual as órbitas inicialmente localizadas em uma região de origem evoluem para uma região de destino. Para estudarmos as propriedades de transporte será necessário localizarmos no espaço de fase a curva invariante *spanning* de menor energia. Tal curva descreve a amplitude do mar de caos confinado em $I_{caos} \in (-I_{fisc}, +I_{fisc})$. O mapeamento discreto de investigação é descrito por duas equações de recorrência, a primeira referente à coordenada ação I e a segunda à coordenada ângulo θ. O sistema apresenta dois parâmetros de controle, sendo eles ε que controla a transição de integrável para não integrável e γ que fornece a forma da divergência da variável θ [1, 2].

Este trabalho tem por objetivo o estudo de transporte de órbitas caóticas, que é investigado em termos do histograma de transporte e da probabilidade de sobrevivência. O histograma fornece a frequência com que ocorre transporte até a janela de destino em um determinado instante n. A probabilidade de sobrevivência fornece a frequência com que as órbitas não adentram a janela de destino.

Resultados e Discussões

O mapeamento discreto de investigação é dado por:

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + \varepsilon \sin(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = \left[\theta_n + \frac{1}{|I_{n+1}|^\gamma}\right] \ mod(2\pi) \end{cases} \quad (1)$$

O parâmetro ε controla a transição do sistema integrável para não integrável e $\gamma > 0$ é um parâmetro livre que controla o comportamento de θ_{n+1} no limite em que $I_{n+1} \to 0$. A figura 1 ilustra o espaço de fases do modelo de estudo para diferentes valores do parâmetro de controle ε.

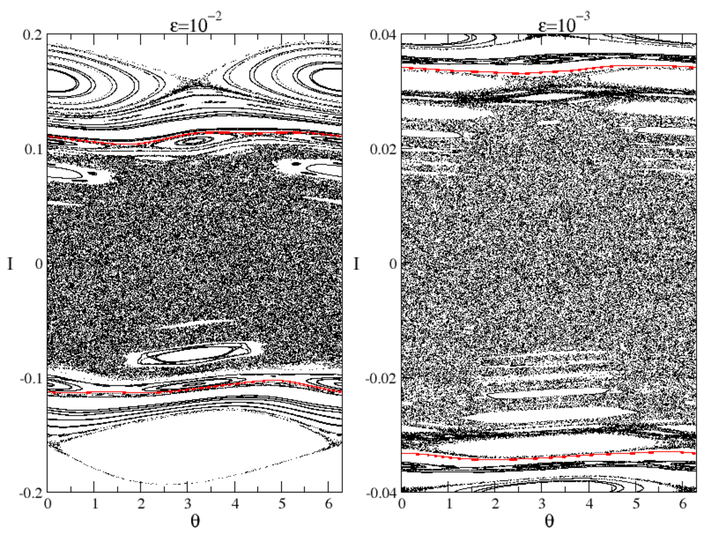

Figura 1: *Espaço de fases do mapeamento (1) com $\varepsilon = 10^{-2}$ e $\varepsilon = 10^{-3}$, respectivamente.*

Para localizarmos as curvas invariantes *spanning* (I_{fisc}), as curvas em vermelho no espaço de fase da figura 1, realizamos uma conexão com o mapa padrão. De acordo com a referência [3], existe um valor $K_c = 0.9716...$ em que o sistema exibe uma transição de caos local para caos global. Utilizamos essa propriedade para descrever localmente a posição de I_{fisc}. E quando consideramos que a variação ΔI é pequena, a curva invariante pode ser descrita como: $I_{fisc} \cong \pm[\frac{\gamma\varepsilon}{0{,}9716...}]^{\frac{1}{\gamma+1}}$.

Com a descrição da curva invariante *spanning*, podemos agora estudar o transporte caótico [4]. Consideramos as janelas de origem distantes das regiões de movimento regular e as janelas de destino definidas como uma região do mar de caos localizada no espaço de fase em relação à posição média da curva invariante *spanning*. O estudo de transporte que focalizamos consiste na investigação dos histogramas normalizados de transporte e na probabilidade de sobrevivência. O histograma $H(n)$ é o número de trajetórias que atingem a região de destino na iteração n. Numericamente, antes de iniciar o processo iterativo das CIs, H é definido como zero em todas as componentes. Em seguida, o processo iterativo das CIs é iniciado. Se a órbita de uma CI chegar na região de destino então a componente da iterada de H é aumentada pela unidade e a órbita de outra CI é iniciada. $H(n)$ depende do tamanho M do conjunto de CIs. O histograma normalizado de transporte é dado por:

$$h(n) = \frac{H(n)}{M}. \quad (2)$$

A figura $2(a)$ ilustra o histograma $h(n)$ para seis valores diferentes do parâmetro ε. Para cada curva de $h(n)$ observamos uma função crescente para n suficientemente pequeno, mas conforme as iterações prosseguem, mais órbitas alcançam a janela de destino. Observamos que cada curva de $h(n)$ atinge um valor máximo e depois se torna uma função decrescente.

Vamos estabelecer h_{max} como o valor máximo de cada curva $h(n)$ e n_p como o valor de n tal que $h(n_p) = h_{max}$. Perto de n_p, as curvas de $h(n)$ são descritas por uma função quadrática com boa aproximação. Assim, com os parâmetros de ajustes dessa função quadrática, obtemos as coordenadas (n_p, h_{max}) da transição do regime de crescimento para decaimento de cada $h(n)$. A figura $2(b)$ exibe o gráfico $\log - \log$ de n_p em função de ε e a figura $2(c)$ o gráfico $\log - \log$ de h_{max} em função de ε.

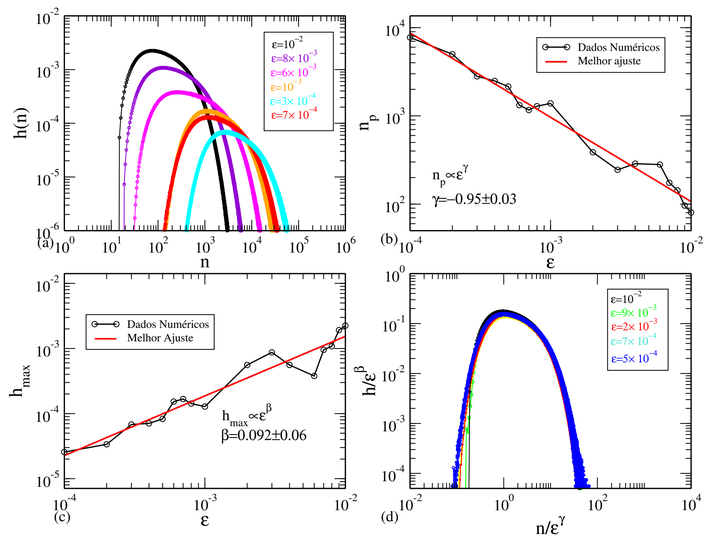

Figura 2: *(a)Histogramas de transporte para diferentes valores de ε, considerando $M = 10^8$ CIs, (b) gráfico de n_p em função de ε, (c) o valor máximo de cada histograma em função de ε e (d) o colapso das diferentes curvas dos histogramas.*

Pelas figuras $2(b)$ e (c) pode-se fazer um melhor ajuste dos dados numéricos. Com essa nova informação, apresentamos uma descrição de escala de $h(n)$ para realizarmos as transformações de variáveis $h \to h/\varepsilon^\beta$ e $n \to n/\varepsilon^\gamma$ e obtemos o colapso das curvas de $h(n)$, figura $2(d)$.

O segundo estudo de transportes caóticos é através da probabilidade de sobrevivência. Numericamente, antes de iniciar o processo iterativo das CIs, N é definido como zero em todas as componentes. Em seguida, o processo iterativo das CIs é iniciado. Se a órbita de uma CI chegar na região de destino então armazenaremos o valor da última iteração sem adentrar a janela de destino e a órbita de outra CI é iniciada. A probabilidade de sobrevivência normalizada é dada por:

$$P(n) = \frac{N(n)}{M}. \quad (3)$$

A figura $3(a)$ ilustra a probabilidade $P(n)$ para cinco valores diferentes do parâmetro ε. Observamos que inicialmente, para todas as curvas, a probabilidade é igual a 1. Com o decorrer das iterações a probabilidade de sobrevivência começa a decair, pois cada vez mais CIs chegam a janela de destino. Esse decaimento, para valores pequenos de n, é descrito por decaimentos exponenciais, como observado na figura $3(b)$.

Sabendo-se que para valores pequenos de n as curvas se comportam como decaimentos exponenciais e que a equação que descreve esse comportamento é dada por $P(n) = A.e^{-\alpha n}$, pode-se realizar um gráfico de α em função de ε com os dados numéricos de cada curva e fazer um melhor ajuste desses dados, como mostrado na figura $3(c)$. Com essa nova informação, apresentamos uma descrição de escala de $P(n)$ para realizarmos as transformações de variáveis $n \to n\varepsilon^z$ e obtemos o colapso das curvas de $P(n)$ para valores pequenos de n, figura $3(d)$.

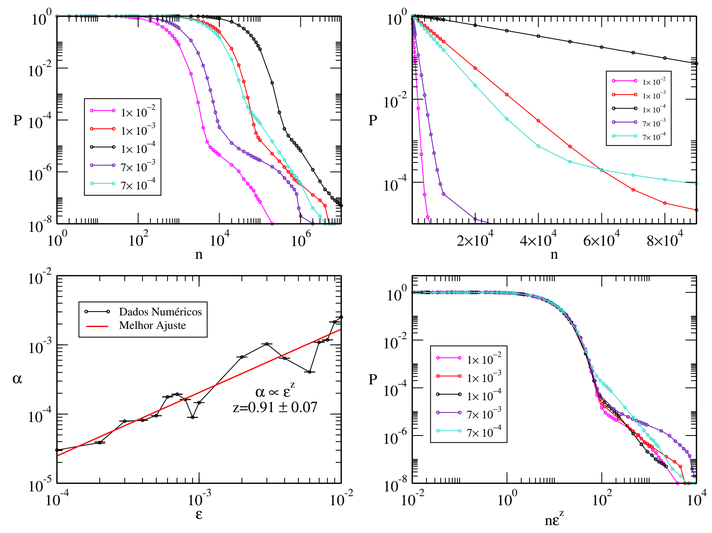

Figura 3: *(a)Gráfico log-log da probabilidade de sobrevivência para diferentes valores de ε, considerando $M = 10^8$ CIs, (b) gráfico log-linear de P em função de n, (c) expoente α em função de ε e (d) o colapso das diferentes curvas da probabilidade de sobrevivência.*

Conclusões

- A partir da conexão do mapeamento de estudo com o mapa padrão foi possível obter a localização da curva invariante *spanning*. Assim, pôde-se definir regiões no espaço de fase para o estudo do transporte caótico.
- O histograma normalizado $h(n)$ é uma função crescente para n suficientemente pequeno, pois a maioria das órbitas ainda estão próximas da janela de origem. Cada curva atinge um valor máximo e depois se torna uma função decrescente. Isto é esperado, pois conforme as iterações prosseguem, mais órbitas atingem a janela de destino e menos órbitas ficam remanescentes.
- Observamos que as grandezas h_{max} e n_p dependem de ε. Quando aumentamos o parâmetro ε, h_{max} aumenta enquanto n_p diminui.
- Mostramos, após considerações de escala, que o histograma apresenta um comportamento universal para diferentes valores de ε.
- A probabilidade de sobrevivência descreve um comportamento de decaimento exponencial para valores pequenos de n. Observamos que para valores grandes de n o decaimento passa ser um decaimento de lei de potência ou um exponencial esticado.

Referências

[1] LEONEL, E.D. *Fundamentos da Física Estatística*. Editora Blucher, São Paulo, 2015.

[2] LEONEL, E.D.; KUWANA, C.M. *An Investigation of Chaotic Diffusion in a Family of Hamiltonian Mappings Whose Angles Diverge in the Limit of Vanishingly Action*. Journal of Statistical Physics **170**: 69, 2018.

[3] LICHTENBERG, A.J., LIEBERMAN. M.A. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[4] FARIA, N.B. de et al. *Transport of chaotic trajectories from regions distant from or near to structures of regular motion of the Fermi-Ulam model*. Physical Review E **94**: 042208, 2016.

Agradecimentos

L.H.P. agradece à CAPES, E.D.L. agradece ao CNPq e à FAPESP.