

1st Perspectives on Oscillation Control

Introdução

Nos diversos ramos da física, matemática e filosofia da ciência, a ideia de estudar as recorrências de um sistema dinâmico deve-se ao francês Henri Poincaré. O intuito de Poincaré foi observar as recorrências (retornos) das órbitas a uma mesma configuração, isto é, a uma mesma região I no espaço de fases.

Na maioria das vezes a observação da evolução temporal das órbitas de um sistema dinâmico é feita no espaço de fases porque cada ponto deste espaço descreve univocamente o estado do sistema. Dessa forma, propomos neste trabalho observar as recorrências das órbitas a uma mesma configuração, ou seja, a uma mesma região no espaço de fases para o Modelo Fermi-Ulam, o qual tem a dinâmica descrita pelo seguinte mapeamento

$$T : \begin{cases} \phi_{n+1} = \left[\phi_n + \frac{2}{V_n} \right] \text{mod } 2\pi \\ V_{n+1} = |V_n - 2\varepsilon \sin(\phi_{n+1})| \end{cases}, \quad (1)$$

em que o valor absoluto na segunda equação foi introduzido com o objetivo de evitar que, após uma colisão, a partícula tenha velocidade negativa [1].

Objetivos

O foco do trabalho é investigar algumas propriedades do tempo de recorrência de Poincaré, assim como, a sua relação com a dimensão fractal das diferentes regiões do espaço de fases e o processo de difusão nessas mesmas áreas. Nosso intuito é aplicar esse formalismo em mapeamentos discretos bidimensionais Hamiltonianos, aqui neste trabalho ilustrado pelo Modelo Fermi-Ulam.

Resultados e Discussões

O sentido da recorrência de Poincaré é que a trajetória retorna a um ponto δ -próximo à condição inicial. Assim, a trajetória de um sistema é dita recorrente a um intervalo I_δ se, uma vez iniciada no ponto $\vec{x}_0 \in I_\delta$, $\forall \delta$ existir um tempo t^* tal que, após t^* , a trajetória encontra-se a uma distância $|\vec{x}_{t^*} - \vec{x}_0| \leq \delta$, ou seja, $\vec{x}_{t^*} \in I_\delta$ [2].

Medir o tempo de recorrência de Poincaré pode nos dar informações sobre a dimensão fractal, uma vez que um ajuste em lei de potência do gráfico do tempo de recorrência médio $\langle t_r \rangle$ em função do tamanho da caixa selecionada ε nos dá o expoente τ , o qual em valor absoluto converge para a dimensão fractal d_w quando $\varepsilon \rightarrow 0$ [3].

Em geral a relação entre $\langle t_r \rangle$ e a região escolhida é dada da seguinte forma:

$$\langle t_r \rangle = \frac{1}{\varepsilon^{d_w}}, \quad (2)$$

onde d_w é a dimensão fractal e ε o lado da caixa.

A Figura 1 mostra o espaço de fases para o Modelo Fermi-Ulam, dado pelo mapeamento apresentado na equação 1. Nessa figura destacamos quatro regiões do espaço de fases para as quais calculamos o tempo de recorrência de Poincaré médio $\langle t_r \rangle$, as regiões vermelha e rosa estão imersas no caos, já as regiões azul e verde foram escolhidas dentro das ilhas de estabilidade (ilhas KAM).

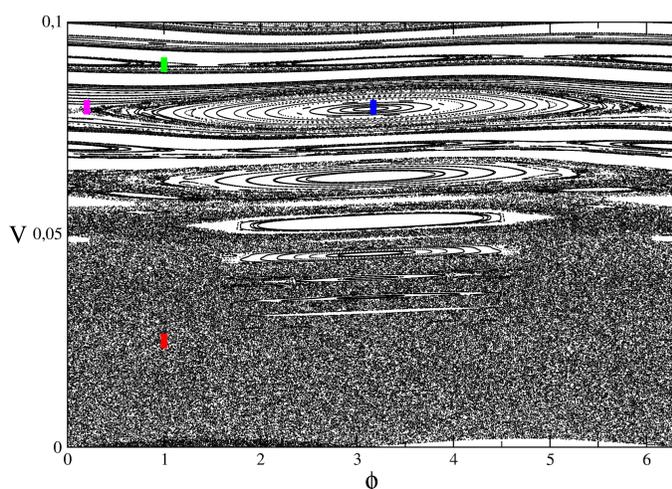


Figura 1: Espaço de fases para o Modelo Fermi-Ulam.

Na Figura 2 apresentamos o gráfico em escala logarítmica de $\langle t_r \rangle$ em função de ε , através do qual é possível notar dois comportamentos distintos, ou seja, as curvas relacionadas às condições iniciais dadas nas regiões caóticas decaem com $\tau \approx -2$, por outro lado, as condições iniciais dadas nas regiões sobre as ilhas KAM decaem com $\tau \approx -1$.

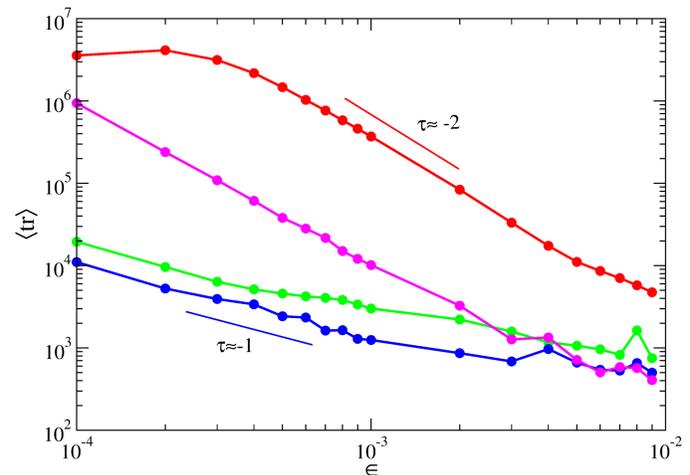


Figura 2: Tempo de recorrência médio em função do tamanho do intervalo de recorrência ε .

Vale a pena destacar que o fenômeno de stickiness pode afetar o tempo de recorrência, já que a órbita fica presa na região de stickiness até escapar para o mar de caos e eventualmente retornar a uma posição próxima a condição inicial.

A dimensão fractal está relacionada com o coeficiente de difusão μ através da seguinte equação [4]:

$$d_w = \frac{2}{\mu}, \quad (3)$$

sendo assim, quando as condições iniciais estão localizadas dentro das ilhas, $d_w = 1$, temos que $\mu = 2$ correspondendo a um processo de difusão anômalo, já para o caso em que as condições iniciais estão localizadas longe das ilhas (região caótica) $d_w = 2$ e $\mu = 1$ e o processo converge para uma difusão normal.

Conclusões

O tempo de recorrência de Poincaré médio depende do tamanho ε da caixa na qual damos as condições iniciais. Mostramos que o ajuste em lei de potência do gráfico de $\langle t_r \rangle$ em função de ε nos fornece $\tau \approx -2$ para condições iniciais tomadas nas regiões caóticas. Por outro lado, quando as condições iniciais são dadas dentro das ilhas de estabilidade temos $\tau \approx -1$. Vimos ainda que o valor absoluto de τ é igual a dimensão fractal d_w , ou seja, $d_w = |\tau|$, logo para as regiões caóticas $d_w = 2$, coincidindo com a dimensão do mapeamento e para as regiões escolhidas dentro das ilhas $d_w = 1$, dimensão igual a de uma curva. Além disso, vimos que $d_w = 2/\mu$, com isso temos que nas regiões caóticas o expoente de difusão converge para $\mu = 1$ e dentro das ilhas de estabilidade temos $\mu = 2$.

Referências

- [1] LEONEL, E. D. *Invariância de Escala em Sistemas Dinâmicos Não Lineares*. J. São Paulo: Blucher, 2019. 476 p.
- [2] ALTMANN, E. G.; SILVA, E. C. da; CALDAS, I. L.. *Recurrence time statistics for finite size intervals*. Chaos, 14: 975, 2004.
- [3] AFRAIMOVICH, V.; UGALDE, E.; URIAS, J. *Fractal Dimensions for Poincare Recurrences*. Elsevier, 2016.
- [4] HARSOULA, M.; KARAMANOS, K.; CONTOPOULOS, G.. *Characteristic times in the standard map*. Phys RevE, 2018.

Agradecimentos

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas – Campus Inconfidentes. Ao grupo de pesquisa em sistemas complexos e dinâmica não linear da UNESP - Rio Claro.